ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1980

MATHEMATIQUES II

(Deux pages dactylographiées)

M P'

N.B.1 a) Les parties I et II du problème sont indépendantes.
b) Dans les calculs numériques, pour lesquels il est recommandé d'utiliser une calculatrice, le candidat indiquera sans justification la précision qu'il peut garantir (et qui pourra être supérieure à celle que demande l'énoncé).

N.B.2 Le problème est commun aux trois options M, P', T.A., à l'exception des questions II-1 et II-2.

Notations : Le temps t décrit $\mathbb{R}_+$, ensemble des réels positifs ou nul. On étudie le mouvement E/e d'un espace affine euclidien orienté E par rapport à un espace affine euclidien orienté e, d'espace vectoriel associé $\vec{e}$; $\vec{e}$ est rapporté à un repère orthonormé positif $(O; \vec{i},\vec{j},\vec{k})$; E est rapporté à un repère $(A; \vec{I},\vec{J},\vec{K})$ dont, à tout instant t, la "position" est un repère orthonormé positif $(A(t); \overrightarrow{I(t)},\overrightarrow{J(t)},\overrightarrow{K(t)})$ de e.

Le mouvement E/e est défini par :

$$\overrightarrow{I(t)} = \cos t\, \vec{i} + \sin t\, \vec{j}$$
$$\overrightarrow{J(t)} = \cos \alpha(t)\, \overrightarrow{J_1(t)} + \sin \alpha(t)\, \vec{k}, \text{ où } \overrightarrow{J_1(t)} = \vec{k} \wedge \overrightarrow{I(t)}$$
$$\overrightarrow{OA(t)} = a\, \overrightarrow{J_1(t)} + f(t)\, \vec{k}$$

où a est une constante réelle strictement positive, et où α et f sont des applications deux fois continûment dérivables de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, telles que $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$ et $f(0) = 0$.

$\overrightarrow{\Omega(t)}$ et $\Delta(t)$ désignent respectivement le vecteur rotation instantanée et l'axe instantané (de rotation et de glissement) à l'instant t, dans le mouvement E/e.

Partie préliminaire O.

O-1. Déterminer les composantes de $\overrightarrow{J(t)}$ et $\overrightarrow{K(t)}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de $\vec{e}$.
Déterminer les composantes de $\overrightarrow{\Omega(t)}$ dans la base $(\overrightarrow{I(t)},\overrightarrow{J(t)},\overrightarrow{K(t)})$ de $\vec{e}$.

O-2. Montrer que l'on peut choisir l'application α (telle que $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$) de façon qu'à tout instant t les vecteurs $\overrightarrow{\Omega(t)}$ et $\overrightarrow{I(t)} + \overrightarrow{J(t)}$ soient orthogonaux.
L'application α étant ainsi choisie, dresser son tableau de variation, et expliciter en fonction de t, d'abord sin $\alpha(t)$ et cos $\alpha(t)$, puis les composantes de $\overrightarrow{\Omega(t)}$.

Partie I. Dans cette question, on adopte : $\cos \alpha(t) = \text{th } t$; $\sin \alpha(t) = \frac{1}{\text{ch}t}$.
On désigne par M le point mobile par rapport à e qui est défini par : $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{K(t)}$.
Soient Γ la trajectoire de M et γ la projection orthogonale de Γ sur le plan $(O; \vec{i},\vec{j})$.

I-1. Montrer qu'il existe un unique réel $t_0 \in [0,\frac{\pi}{2}]$ tel que la tangente à γ au point m_0 de paramètre t_0 soit dirigée par $\vec{j}$; calculer des valeurs approchées à 5.10^{-4} près de t_0 et des coordonnées (x_0,y_0) de m_0.
Donner une équation polaire de γ ; tracer soigneusement l'arc de γ qui correspond à : $t \in [0,\frac{3\pi}{2}]$ en prenant 5 centimètres pour unité graphique.

I-2. Soit T un réel strictement positif. Calculer la longueur de l'arc de la trajectoire Γ qui correspond à $t \in [0,T]$; que se passe-t-il quand T tend vers l'infini ?

I-3. Pour t donné, on désigne par D(t) la tangente en M(t) au cercle section de la sphère de centre O et de rayon 1 par le plan qui contient le point M(t) et la droite $(O; \vec{k})$. Trouver un vecteur directeur de D(t) et montrer que cette droite se déduit de la tangente en M(t) à Γ par une rotation d'axe $(O; \overrightarrow{K(t)})$, d'angle à déterminer.

Partie II. On reprend : $\cos \alpha(t) = \text{th } t$, $\sin \alpha(t) = \frac{1}{\text{ch}t}$.
On désigne par C la trajectoire du point A (lié à E) dans son mouvement par rapport à e (cf.données).

.../...

II-1. Déterminer l'application f (telle que f(0) = 0) de façon que soit vérifiée la condition
(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'axe instantané $\Delta(t)$ est tangent à C en A(t).

Δ_t désignant la droite liée à E qui occupe à l'instant t la position $\Delta(t)$ dans e, vérifier que (i) implique :
(ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, Δ_t appartient à un plan fixe P de E.

II-2. Montrer que réciproquement, (ii) implique (i). (Cette question II-2. est indépendante de la suite, mais une importance particulière lui sera attachée).

Dans toute la suite on adopte :

$$\cos \alpha(t) = \text{th } t \; ; \; \sin \alpha(t) = \frac{1}{\text{ch}t} \; ; \; f(t) = a \text{ sh } t.$$

II-3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{I(t)} + \overrightarrow{J(t)}$ dirige la binormale en A(t) à la trajectoire C de λ. Que peut-on en conclure (à propos de la courbe C) pour P(t), position du plan P dans e, à l'instant t ?

II-4. Quand t décrit $\mathbb{R}_+$, $\Delta(t)$ engendre une surface S de e. Montrer que celle-ci peut être représentée paramétriquement par :

$(t,\lambda) \mapsto Q(t,\lambda)$, avec $\overrightarrow{A(t)\,Q(t,\lambda)} = \lambda\, \overrightarrow{\Omega(t)}$

Trouver un vecteur normal à S au point $Q(t,\lambda)$, tel que $\lambda \neq 0$.
Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, S admet P(t) pour plan tangent en tout point de $\Delta(t)$ distinct de A(t).

II-5. Soit B(t) le point de $\Delta(t)$ défini par : $\overrightarrow{A(t)\,B(t)} = \dfrac{a}{\|\overrightarrow{\Omega(t)}\|}\, \overrightarrow{\Omega(t)}$.

Calculer, quand t décrit $[0, 2\pi]$:
a) l'aire de la portion S' de la surface S décrite par le segment de droite $[A(t), B(t)]$;
b) l'aire de la portion P' du plan P décrite par le segment de droite $[A, B_t]$, où B_t est le point lié à E qui occupe à l'instant t la position B(t) dans e.

Pour a = 2, donner une valeur approchée à 5.10^{-5} près de ces aires.

*****
***
*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail